

10 ДӘРІС

Бақыланған көлем әдісін қолдана отырып, екінші ретті дербес туындылы дифференциалдық теңдеулерді қорыту.

Навье-Стокс теңдеулер жүйесіндегі үзіліссіздік (массаның сақталу заңы) және қозғалыс (импульстің сақталу заңы) теңдеулерін қорыту.

Әл-Фараби атындағы Қазақ Ұлттық Университеті

Физикалық техникалық факультет
Жылуфизикасы және техникалық физика кафедрасы

10 ДӘРІС

Бақыланған көлем әдісін қолдана отырып, екінші ретті дербес туындылы дифференциалдық теңдеулерді қорыту.

Навье-Стокс теңдеулер жүйесіндегі үзіліссіздік (массаның сақталу заңы) және қозғалыс (импульстің сақталу заңы) теңдеулерін қорыту.

Дәріскер: А.К. Сариева, п.ғ.к., аға оқытушы

ДӘРІС МАҚСАТЫ

Студенттерге бақыланған көлем әдісін қолдана отырып, екінші ретті дербес туындылы дифференциалдық теңдеулерді қорытуды үйрету. Навье-Стокс теңдеулер жүйесіндегі үзіліссіздік (массаның сақталу заңы) және қозғалыс (импульстің сақталу заңы) теңдеулерін қорыту және түсіндіру.

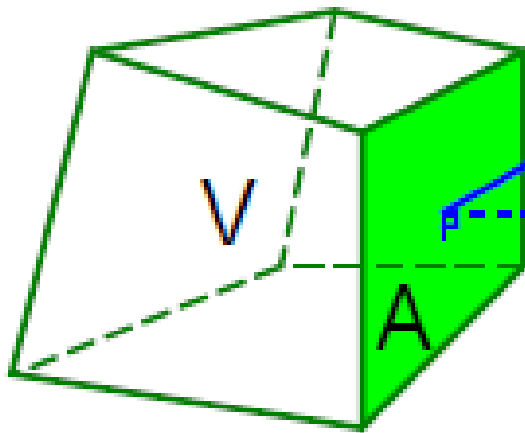
ЖОСПАР

1. Екінші ретті дербес туындылы дифференциалдық теңдеулерді қорыту
2. Навье-Стокс теңдеулер жүйесіндегі үзіліссіздік теңдеулерін қорыту

Массаның сақталу заңын қорыту

Жүйедегі массаның сақталу теңдеуі бақыланған көлемдегі барша масса көлемі мен ондағы кірген-шыққан ағындардың қорытынды суммасымен теңгеріледі. Яғни, бақыланған көлемдегі массаның өзгерісі мен ондағы кірген-шыққан ағындардың тығыздығы тұрақты болып қалады.

$$\frac{d}{dt}(\text{mass}) + \sum_{\text{faces}} (\text{mass flux}) = 0$$

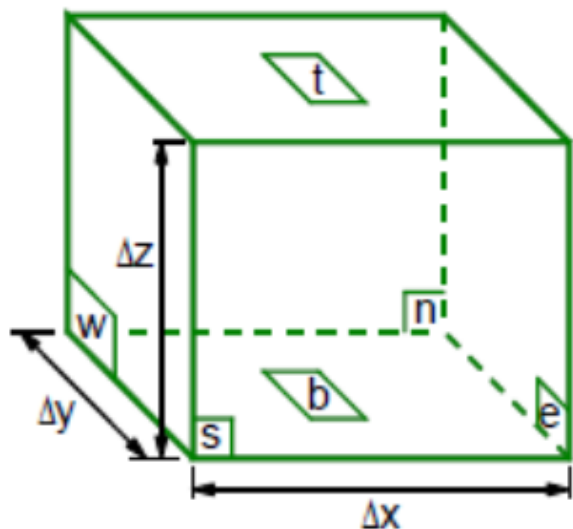


Көлемі V болатын бақыланған көлемдегі және S бетке бағытталатын ағындар бойынша: ρV

Бір бет бойымен масса ағының тығыздығы:

$$Q = \rho u S$$

- секундтық шығын деп те аталады.



Массаның сақталу заңын берілген жүйені ұсақ бақыланған көлемдерге жіктеу арқылы сипаттаймыз және қорытамыз.

$$\underbrace{\frac{d(\rho V)}{dt}}_{\text{rate of change of mas}} + \underbrace{(\rho u A)_e - (\rho u A)_w + (\rho v A)_n - (\rho v A)_s + (\rho w A)_t - (\rho w A)_b}_{\text{net outward mass flux}} = 0$$

$V = \Delta x \Delta y \Delta z$ белгілеу енгізе отырып,

$$\frac{d(\rho \Delta x \Delta y \Delta z)}{dt} + [(\rho u)_e - (\rho u)_w] \Delta y \Delta z + [(\rho v)_n - (\rho v)_s] \Delta z \Delta x + [(\rho w)_t - (\rho w)_b] \Delta x \Delta y = 0$$

Теңдеудің екі жағын көлемге бөліп:

$$\frac{d\rho}{dt} + \frac{(\rho u)_e - (\rho u)_w}{\Delta x} + \frac{(\rho v)_n - (\rho v)_s}{\Delta y} + \frac{(\rho w)_t - (\rho w)_b}{\Delta z} = 0$$

Математикалық талдау бөлімінен белгілі білімімізді қолдана отырып, яғни $\lim \Delta x, \Delta y, \Delta z \rightarrow 0$:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0$$

- берілген теңдеу жалпы жүйе үшін массаның сақталу заңы немесе үзіліссіздік теңдеуі деп аталады.

Егер жүйе (сұйық) сығылмайтын болса,

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

Импульстің сақтау заңын қорыту

Ньютонның екінші заңы бойынша жүйедегі импульстің өзгерісі күштерге тәуелді болады: $p = m \times v$

Бақыланған көлемдегі импульстің өзгерісі мен ондағы кірген шыққан ағындардың тығыздығы жүйеге әсер ететін күштермен теңгеріледі:

Импульстің сақталу заңын қорытпас бұрын жүйеге әсер ететін күштерге тоқталып өтейік.

Жүйеге әсер ететін күштер екі топқа жіктеледі:

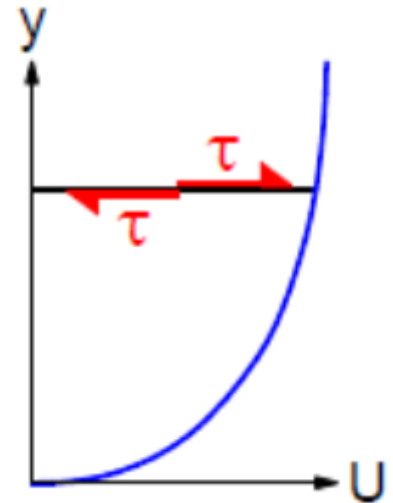
1. беттік күштер (бетке тура пропорционал, бақыланған көлемнің бетіне қарай бағытталады);
2. денелік күштер (көлемге тура пропорционал).

Беттік күштерге жататындар:

1. қысым күші p – бетке нормаль бағытталады;
2. үйкеліс күші τ - екі салыстырмалы қозғалыс арасында қалыптасады;

Үйкеліс күші Ньютон заңымен сипатталады:

$$\tau \equiv \tau_{12} = \mu \frac{\partial u}{\partial y}$$



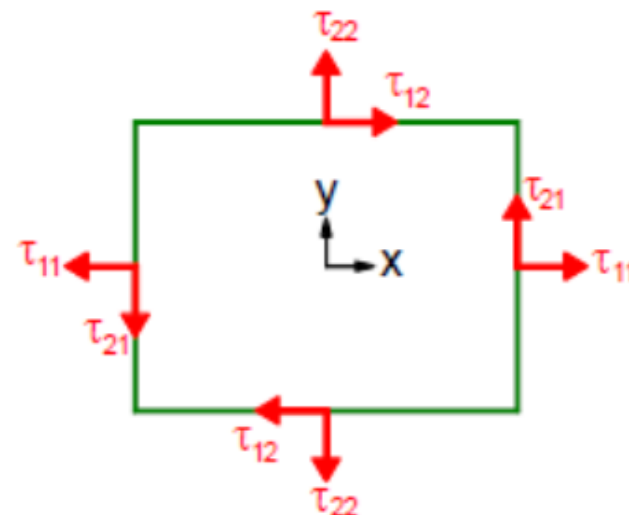
немесе

$$\tau_{12} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

немесе тензор түрінде жазатын болсақ,

$$\tau_{ij} = \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

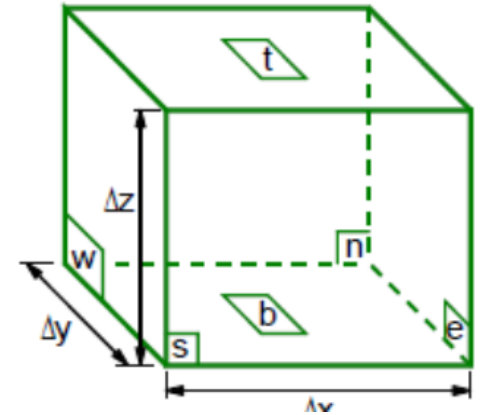
Тензор (лат. *tensus*, "кернеулі")
- математика мен физикада
қолданылатын векторлық
кеңістікте берілген сызықтық
алгебраның математикалық
объектісі



Тензор - бір сызықтық кеңістіктің
элементтерін екіншісінің элементтеріне
сызықтық түрлендіретін сызықтық
алгебра нысаны. Тензор көп өлшемді
болуы мүмкін.
Дербес жағдайда нөлдік дәрежелі тензор -
скаляр.
Бірінші дәрежелі-вектор.
Екінші дәреже - матрица.

Денелік күшке ауырлық күшін жатқызуға болады, яғни бақыланған көлеміміз

бірлік көлем болатындықтан: ρg



$$\underbrace{\frac{d}{dt}(\rho V u)}_{\text{rate of change of momentum}} + \underbrace{(\rho u A)_e u_e - (\rho u A)_w u_w + (\rho v A)_n u_n - (\rho v A)_s u_s + (\rho w A)_t u_t - (\rho w A)_b u_b}_{\text{net outward momentum flux}}$$

$$= \underbrace{(p_w A_w - p_e A_e)}_{\text{pressure force in x direction}} + \text{viscous and other forces}$$

$$\frac{d}{dt}(\rho \Delta x \Delta y \Delta z u) + [(\rho u)_e u_e - (\rho u)_w u_w] \Delta y \Delta z + [(\rho v)_n u_n - (\rho v)_s u_s] \Delta z \Delta x + [(\rho w)_t u_t - (\rho w)_b u_b] \Delta x \Delta y$$

$$= (p_w - p_e) \Delta y \Delta z + \text{viscous and other forces}$$

Теңдеудің екі жағын көлемге бөліп:

$$\frac{d(\rho u)}{dt} + \frac{(\rho u u)_e - (\rho u u)_w}{\Delta x} + \frac{(\rho v u)_n - (\rho v u)_s}{\Delta y} + \frac{(\rho w u)_t - (\rho w u)_b}{\Delta z} = - \frac{(p_e - p_w)}{\Delta x} + \text{viscous and other forces}$$

Яғни,

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v u)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w u)}{\partial z} = - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \nabla^2 u + \text{other forces} \quad - \text{жалпы}$$

жағдай үшін импульстің сақталу заңы немесе қозғалыс теңдеулері

Мұндағы

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad - \text{Лаплас операторы}$$

$$\sigma_{ij} = -p \delta_{ij} + \tau_{ij}, \quad - \text{тұтқыр кернеу тензоры немесе}$$

$$\tau_{ij} = \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right)$$

Егер сұйық сығылмайтын болса:

$$\frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i u_j)}{\partial x_j} = - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \nabla^2 u_i + f_i$$

БАҚЫЛАУ СҰРАҚТАРЫ

- ❑ Бақыланған көлем әдісінің мәнісі неде?
- ❑ Екінші ретті дербес туындылы дифференциалдық теңдеулерді келтіріңіз
- ❑ Навье-Стокс теңдеулер жүйесіндегі үзіліссіздіктің мағынасын ашып көрсетіңіз.
- ❑ Массаның сақталу заңын берілген жүйені ұсақ бақыланған көлемдерге жіктеу арқылы сипаттау және қорыту.
- ❑ Берілген жүйені ұсақ бақыланған көлемдерге жіктеу арқылы импульстың сақталу заңын сипаттау және қорыту.

ӘДЕБИЕТ

1. Демидович Б.П., Марон И.А. Основы вычислительной математики. - Спб.: Лань, 2009 - 672 с.
2. Демидович Б.П., Марон И.А., Шувалова Э.З. Численные методы анализа. - Спб.: Лань, 2009 - 400с.
3. Н.С.Бахвалов, Н.П.Жидков, Г.М.Кобельков. Численные методы. М., Физматлит, 2011-364 с.
4. Вержбицкий В.М. Численные методы (линейная алгебра и нелинейные уравнения): Учебное пособие для вузов. М.: Высшая Школа, 2002 - 153 с.
5. Пирумов У.Г. Численные методы. Учебное пособие для вузов. М.: Дрофа, 2013 - 221 с.
6. Костомаров Д. П. Вводные лекции по численным методам. Москва: Логос, 2006 .- 184 с.
7. Волков Е. А. Численные методы. - Санкт-Петербург: Лань, 2009 .-256 с.
8. Исаков В. Н.Элементы численных методов : -Москва: Академия, 2012 .-192 с
9. Охорзин В.А. Прикладная математика в системе Mathcad. Спб.: Лань, 2008 – 352 с.
10. Болегенова С.А. Численные методы теплофизики: учебное пособие. – Алматы: «Қазақ университеті», 2007. – 100 с.

Интернет-ресурстар:

1. <https://dxdy.ru> ›
2. window.edu.ru
3. <https://books.google.kz> › book